9 класс

Задача 1. Есть три брата-акробата. Их средний рост — 1 метр 74 сантиметра. А средний рост двух из этих братьев: самого высокого и самого низкого — 1 метр 75 сантиметров. Какого роста средний брат? Ответ обоснуйте.

Ответ: 1 метр 72 сантиметра.

Решение. Поскольку средний рост всех трёх — 1 метр 74 сантиметра, суммарный рост всех составляет 5 метров 22 сантиметра. Средний рост двух братьев равен 1 метр 75 сантиметров, поэтому их суммарный рост составляет 3 метра 50 сантиметров. А значит, рост среднего брата составляет 1 метр 72 сантиметра. □

Критерии

2 б. Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка.

4 б. Приведён верный ответ и обоснование.

Задача 2. Радиус описанной окружности равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен основанию AC. На основании AC построен квадрат $AKLC$ так, что отрезок KL пересекает боковые стороны треугольника. Докажите, что треугольник BKL равносторонний.

Решение. Отметим точку O — центр описанной окружности треугольника ABC. Из условия получим, что $OA = OC = AC$, то есть треугольник AOC равносторонний. Поскольку $AKLC$ — квадрат, имеем $AK = KL = LC = AC$. Заметим, что $BO \parallel LC$, поскольку обе прямые перпендикулярны AC, и также $BO = LC$ (рис. 3).

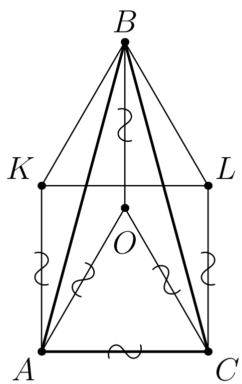

Рис. 3: к решению задачи 2

Это означает, что $OBLC$ — параллелограмм. Тогда получаем, что $OC = LB$. Аналогично получаем, что $KB = AO$. Итого получаем, что $KB = BL = KL$, что и требовалось доказать. □

Критерии

2 б. Доказано, что $OBLC$ — параллелограмм, но дальнейших продвижений нет.

4 б. Верное решение.

Задача 3. Назовём трёхзначное число *интересным,* если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажите, что больше чисел получить нельзя.)

Ответ: 122.

Решение. Числа 289, 290, …, 299, 300, …, 399, 400, …, 409, 410 являются интересными (напомним, что 0 делится на 3), и их всего 122. Докажем, что большего количества быть не может.

Предположим, что нам удалось найти большее количество подряд идущих интересных чисел; выберем из них 123 подряд идущих.

Назовём сотню подряд идущих чисел, у которых разряд сотен одинаков и делится на 3, *интересной* сотней. Заметим, что до любой интересной сотни идут только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 89, 90, …, 99, а 12-е число оканчивается на 88 и интересным не будет. Аналогично после интересной сотни идут тоже только 11 интересных чисел, оканчивающихся на 00, …, 09, 10, а 12-е число оканчивается на 11 и также не интересное.

Если наша последовательность из 123 чисел пересекается с некоторой интересной сотней, то она содержит хотя бы 12 чисел либо до, либо после этой сотни. Следовательно, хотя бы одно число в ней не интересное.

Если же наша последовательность из 123 чисел не пересекается с интересной сотней, то она содержит хотя бы одно число, оканчивающееся на 55 (как и на любую другую комбинацию цифр). Но это число не интересное, так как ни один разряд в нём на 3 не делится. $\square$

Критерии

0 б. Неверный ответ и неверный (или отсутствующий) пример.

1 б. Приведён верный ответ.

1 б. Приведён верный пример, но в нем неправильно посчитано количество чисел.

2 б. Приведён верный пример и ответ, но нет обоснования, что большее количество чисел невозможно.

4 б. Приведён верный ответ, верный пример и обоснование.

Задача 4. Разность корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами $2018x^2 + ax + b = 0$ — целое число (при этом сами корни необязательно целые). Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на 2018^2.

Решение. Пусть D — дискриминант этого уравнения. Обозначим корни уравнения через $x_1 = \frac{-a+\sqrt{D}}{4036}$ и $x_2 = \frac{-a-\sqrt{D}}{4036}$. Тогда $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{2018} = n$ — целое число. Таким образом, $\sqrt{D} = 2018 \cdot n$ и $D = 2018^2 n^2$, что делится на 2018^2. □

Критерии

2 б. Задача верна решена только для целых a и b.

3 б. Получено выражение для разности корней через дискриминант, но дальнейших продвижений нет.

4 б. Приведено верное доказательство.

Задача 5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 19$$

(и докажите, что других нет).

$\text{НОД}(a, b)$ — это наибольший общий делитель, то есть наибольшее натуральное число, делящее и a, и b. $\text{НОК}(a, b)$ — это наименьшее общее кратное, то есть наименьшее натуральное число, кратное и a, и b.

Ответ: $(a, b) = (1, 20), (20, 1), (4, 5), (5, 4), (19, 38), (38, 19)$.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$. Заметим, что и НОК, и НОД делятся на d, а значит, и 19 делится на d. Поскольку 19 простое, получаем, что $d = 1$ или $d = 19$.

- Если $d = 1$, то числа a и b взаимно просты, и $\text{НОК}(a, b) = a \cdot b = 1 + 19 = 20$. Это дает варианты $(1, 20)$, $(20, 1)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$.
- Если $d = 19$, то $\text{НОК}(a, b) = 19 + 19 = 38$. Это означает, что $a = 19$, $b = 38$ или $a = 38$, $b = 19$. □

Критерии

1 б. Приведён верный ответ.

2 б. Рассмотрен только один из случаев $d = 1$ или $d = 19$.

4 б. Приведён верный ответ и обоснование.

Задача 6. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо нет соединения, либо налажено авиасообщение, либо есть железная дорога (одновременно и авиасообщения, и железной дороги быть не может). Известно, что если два города соединены с третьим железной дорогой, то между ними есть авиалиния, а если два города соединены с третьим авиалиниями, то между ними есть железная дорога. Из-за стихийного бедствия отменили все авиарейсы в стране. Правительство постановило в некоторых городах разместить центры гуманитарной помощи, причём так, чтобы из каждого города можно было добраться в подобный центр. Докажите, что необходимо открыть хотя бы 20 таких центров.

Решение. Заметим, что никакой город не соединён железной дорогой более чем с двумя другими городами. Действительно, пусть какие-то три города соединены железной дорогой с одним. Тогда все они между собой соединены авиалиниями, что невозможно по условию задачи. Значит, каждый город связан железной дорогой не более чем с двумя другими. Тогда связанные друг с другом железнодорожным сообщением города представляют собой цепочку (возможно, замкнутую). Докажем, что каждая такая цепочка содержит не более 5 вершин. Пусть города A, B, C, D и E стоят последовательно в цепочке. Поскольку A и C соединены с B железными дорогами, между A и C существует авиалиния. Аналогично между C и E существует авиалиния. Тогда между A и E существует железная дорога, и, значит, города соединены по кругу и больше ни с каким другим городом не связаны. Таким образом, в каждой цепочке не более 5 городов. Чтобы из каждого города можно было добраться до гуманитарного центра, его необходимо открыть в каждой такой цепочке. А значит, и центров необходимо построить хотя бы $100 : 5 = 20$, что и требовалось доказать. $\square$

Критерии

1 б. Доказано, что каждый город соединён железной дорогой не более чем с двумя другими, или эквивалентное утверждение для авиасообщенией.

3 б. Доказано, что в каждой цепочке железнодорожного сообщения не более 5 городов, или эквивалентное утверждение для авиасообщенией.

4 б. Приведено верное доказательство.